Exercices de cinétique

Exercice I : Roulement sans glissement d'un disque sur un plan incliné

Soit $\Re(O, x, y, z)$ un repère muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ l'axe $(O, \vec{j})$ étant dirigé suivant la ligne de plus grande pente. Un disque (D) homogène de masse m et de rayon R se roule au point de contact $I(0, \rho, 0)$ sur le plan incliné $\pi(Oyz)$ et reste perpendiculaire sur lui, et il tourne autour de son axe de révolution (Figure 1). On considère un repère $\Re_1(G, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$ lié au disque.

1. Donner le nombre de degré de liberté du disque.
2. Déterminer le vecteur de rotation du disque par rapport au $\Re$.
3. Quel est le repère étant principal du disque?
4. Calculer $\vec{V}\left(G/_{\Re}\right)$
5. Déterminer la matrice d'inertie de disque (D) en G.
6. Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}_G\left(D/_{\Re}\right)$ en G du disque par rapport à $\Re$.
7. Donner les éléments de réduction du torseur cinématique de (D) par $\Re$ en point G.
8. Exprimer l'énergie cinétique $E_C\left(D/_{\Re}\right)$ du disque par rapport à $\Re$.
9. Déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}_G\left(D/_{\Re}\right)$ en G du disque par rapport à $\Re$.

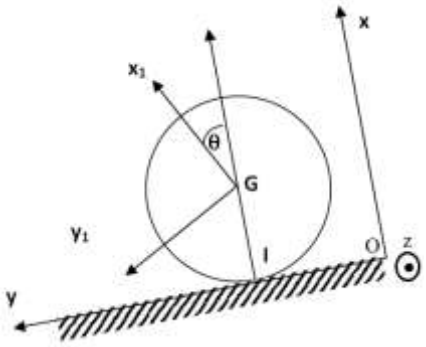

Fig1 : Roulement sans glissement d'un disque sur un plan incliné

Exercice II : Tige articulée en son extrémité

Une tige homogène [OP] de longueur L et de masse m, et est articulée en son extrémité O étant l'origine d'un repère absolu $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère deux repères $\Re_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est obtenu par la rotation de la tige autour de l'axe $(O, \vec{k})$ par l'angle ψ et le deuxième $\Re_2(O, \vec{w}, \vec{v}, \vec{k}_T)$ étant obtenu par la rotation de la tige autour de l'axe $(O, \vec{v})$ par l'angleθ.

1. Déterminer le vecteur de rotation de la tige par rapport au $\Re$.
2. Quel est le repère étant principal de la tige?
3. Déterminer la matrice d'inertie de la tige en G et en déduire en O
4. Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}_G\left(D/_{\Re}\right)$ en G de la tige par rapport à $\Re$
5. Exprimer l'énergie cinétique $E_C\left(D/_{\Re}\right)$ de la tige par rapport à $\Re$
6. Déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}_G\left(D/_{\Re}\right)$ en G de la tige par rapport à $\Re$

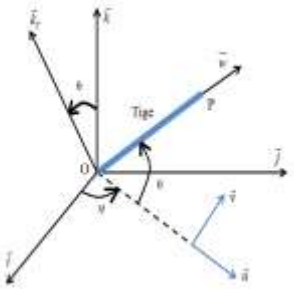

Fig2: Tige articulée en son extrémité O

Exercice III : Roulement d'un cône sur un plan

On considère un cône plein et homogène de rayon R et de hauteur h roule sur le plan $\left(O,\ \vec{i}_0,\ \vec{j}_0\right)$ de sorte que son sommet O reste fixe, la figure 3 en-dessous. Le cône tourne autour de l'axe $\left(O\ \vec{k}_0\right)$ avec l'angle de précession ψ et tourne autour de son axe par l'angle de rotation propreφ, le repère $\Re_o\left(O,\ \vec{i}_0,\ \vec{j}_0,\ \vec{k}_0\right)$ est absolu et $\Re_{cône}\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ lié au cône.

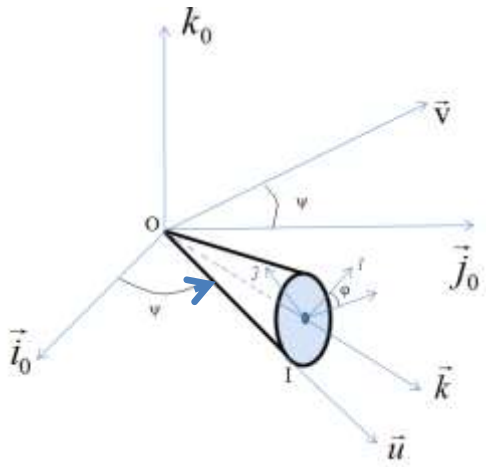

Figure 3: Roulement sans glissement d'un cône

1. Déterminer le vecteur de rotation du cône par rapport au $\Re_o$.
2. Déterminer le centre d'inertie du cône.
3. Quel est le repère étant principal du cône ?
4. Déterminer la matrice d'inertie du cône en O, et en déduire en G.
5. Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}_G\left(cône/\Re_0\right)$ en G du cône par rapport à $\Re_O$.
6. Exprimer l'énergie cinétique $E_C\left(cône/\Re_0\right)$ du cône par rapport à $\Re_O$.
7. Déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}_G\left(cône/\Re_0\right)$ en G du cône par rapport à $\Re_O$.